# Afleveringsopgave 3

Af Jesper Bertelsen

Indholdsfortegnelse

[Afleveringsopgave 3 1](#_Toc153048535)

[Opgave 1 Consider the following differential equation 2](#_Toc153048536)

[1. Rewrite the differential equation as a system of two first-order equations in x1 and x2. 2](#_Toc153048537)

[2. Write code or use a numerical library to solve the system of equations starting from x(0) = 1, x′(0) = 0 for the four values 0.60, 0.70, 0.75, and 0.8 of F0. Argue for your choice of solution method. 4](#_Toc153048538)

[3. Plot phase planes and solution curves for the four F0-values and comment on the results. Make sure that the differential equations are run to large enough t-values to make any patterns clearly visible. 4](#_Toc153048539)

[Opgave 2 Consider a constant matrix and a vector function given by 4](#_Toc153048540)

[1. Compute 4](#_Toc153048541)

[2. Solve the differential equation x′ = Ax + f (t) with initial value using the variations of parameters approach. 5](#_Toc153048542)

[Explain how the solution changes if the system is started from a different x0. 7](#_Toc153048543)

[Opgave 3 Consider the constant matrix given by 7](#_Toc153048544)

[1. Compute the eigenvalues and (generalized) eigenvectors of A. 7](#_Toc153048545)

[2. Solve the differential equation x′ = Ax with initial value 9](#_Toc153048546)

[3. Does the solution to the initial value problem pass through the 9](#_Toc153048547)

[Opgave 4 Consider the two-population system given by 10](#_Toc153048548)

[1. Describe the type of x− and y−populations involved and the nature of their interaction 10](#_Toc153048549)

[2. Find and characterize the system's critical points with respect to type and stability. 10](#_Toc153048550)

[3. Determine what nonzero x− and y−populations can coexist. 12](#_Toc153048551)

[4. Construct a phase-plane portrait and describe the long-term behaviour of the two populations in terms of their initial populations x(0) and y(0). 13](#_Toc153048552)

[Opgave 5 For the statements given below, state whether they are true or false and justify your answer for each statement. 14](#_Toc153048553)

[1. If A is a singular matrix, then eA is also singular. 14](#_Toc153048554)

[2. If A is a 2×2 matrix with λ1 > 0 and λ2 < 0 then all solutions of the initial value problem x′ = Ax, x(0) = x0 will diverge to infinity due to the positive λ1 eigenvalue. 14](#_Toc153048555)

[3. The system described by x′ = ax + y and y′ = −x corresponds to a damped system if a > 0. 14](#_Toc153048556)

In some of the problems below, the computational workload can be somewhat heavy. It is perfectly fine to use a computer to solve the problems. However, if you do so, make sure that you demonstrate mathematical literacy by explaining what you do and why. The grading does not depend on whether you solve the problem by hand or by computer.

## Opgave 1 Consider the following differential equation

Due to the term, the differential equation is nonlinear and cannot be solved with our standard analytical methods. Instead, numerical methods must be used.

### Rewrite the differential equation as a system of two first-order equations in x1 and x2.

Hvis jeg kan finde de kritiske punkter, så kan jeg måske linetarizerer systemet i området om de punkter.

Hvis jeg så laver Jacobian på den, så kan jeg bruge det til at lineraritiserer ligningen.

Hvor

Hvor *u & v* er et fikspunkt.

Hvis jeg så ser på hvornår et fikspunkt indtræffer, så må det være:

Jeg har ikke haft meget held med at finde det andet koordinat, så hvad hvis jeg siger, at start frekvensen er 0.

Da vil fikspunktet for være når

Som den gør, når

Så da må der kunne beskrives en linearitasering i punkterne:

Da må jeg kunne beskrive hældningen som:   
*For (x1, x2) = (0, -1)*

*For (x1, x2) = (0, 0)*

*For (x1, x2) = (0, 1)*Faktisk så kan systemet beskrives på præcis samme måde lineært i alle de 3 punkter.

==========

For

==========

### Write code or use a numerical library to solve the system of equations starting from x(0) = 1, x′(0) = 0 for the four values 0.60, 0.70, 0.75, and 0.8 of F0. Argue for your choice of solution method.

Jeg kunne prøve at sætte mig ind i hvilken numerisk approksimation jeg skulle bruge, men det her er det sidste af afleveringen som jeg arbejder på, og har brugt meget tid på den allerede, og har bare ikke mere tid, så jeg vælger ikke at foresætte.

Måske kunne man approksimere det med noget newton raphsons metode eller lignende.

### Plot phase planes and solution curves for the four F0-values and comment on the results. Make sure that the differential equations are run to large enough t-values to make any patterns clearly visible.

## Opgave 2 Consider a constant matrix and a vector function given by

### Compute

At tage exponentialet til en vektor er lidt anderledes. Vi approksimerer den med en taylor serie.

For n gående mod uendelig.

Vi behøver dog ikke at lave uendeligt mange summer for at komme frem til noget der ligner den rigtige værdi. Lad mig bare tage de første 4 led.

Lad mig beregne approksimationen. Jeg bruger python til at lave et script:

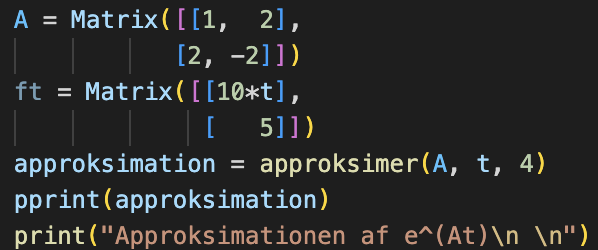
Et billede, der indeholder tekst, skærmbillede, Font/skrifttype

Automatisk genereret beskrivelse

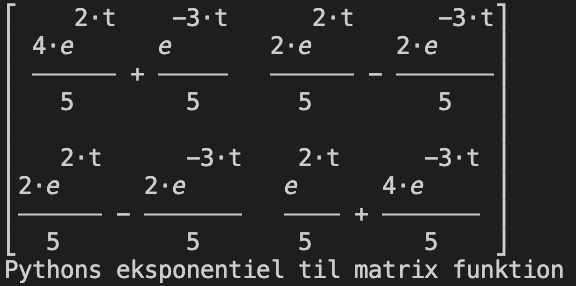
Som starter med en identitets matrice *I*, og lægger summerne af ligningen:

Jeg eksekverer den så:

Et billede, der indeholder tekst, skærmbillede, Font/skrifttype, nummer/tal

Automatisk genereret beskrivelse



Hvor A er matricen, t er et symbol og n = 4.



Med sympy i python kan man også tage exponenten til en matrice, så det gør jeg også. Den skulle være den mere eksakte løsning.

Et billede, der indeholder tekst, Font/skrifttype, skærmbillede

Automatisk genereret beskrivelse

### Solve the differential equation x′ = Ax + f (t) with initial value using the variations of parameters approach.

Hvad jeg er ude efter her er at finde den fundamentale matrice, fordi at jeg ved at:

Og at jeg kan finde den partikulære løsning ved

Hvor *c* er en vektor med koefficienter, og er en funktion.

Jeg ved at

Og jeg har fået givet.

At jeg også har fået nogle start betingelser gør, at jeg ved at

Så derfor ved jeg at

Jeg ved så ikke lige med rækkefølgen som det står i. Har prøvet at lede efter nogle vektor matrix multiplikations properties for at redegøre for, hvorfor det bogen beskriver det i omvendt rækkefølge, men har ikke lige haft held med det.   
I bogen beskriver de den som:

Løsningen kan findes som:

=========================================

=========================================

Så nu mangler jeg bare at finde den fundamentale matrix

Som beskrev alle løsningerne til den homogene differentialligning:

Løsningerne finder jeg ved at finde egenværdierne og deres egenvektorer, så jeg kan skrive løsningerne op som

For v = egenvektorerne, = egenværdierne & *i* er antallet af løsninger.

Egenvektoren

Hvis jeg sætter , så får jeg at:

Så får jeg , for

Nu for

Så nu har jeg begge egenvektorer og deres egenværdier:

===================

, for

, for

===================

Så nu har jeg den fundamentale matrix for systemet:

=======================

=======================

Nu beregner jeg resten i python:

=====================

=====================

Fortolkningen af løsningen som en vektor, kan jeg ikke lige umiddelbart forstå, men her er løsningen i hvert fald.

### Explain how the solution changes if the system is started from a different x0.

har betydning for at erstatte konstanterne i *c*. Da vores start værdi var nul vektoren, blev hele den homogene del lige med 0.   
Dermed afhang systemet udelukkende af den partikulære løsning. Med en vil systemet afhænge af begge løsninger.

## Opgave 3 Consider the constant matrix given by

### Compute the eigenvalues and (generalized) eigenvectors of A.

*Forklaring på hvordan jeg løser delopgaven:*

For egenvektoren, så finder jeg en løsning på

*Løsning af opgaven:*

Hvis den løses med sympys roots, så får jeg 3 repeated rødder i:

===============

===============

Her ses der, at størrelsen af koefficienterne i ligningerne er skalaer af hinanden.

Når rækkerne er lineært afhængige af hinanden, så kan en løsning løse alle.

Og så kan jeg vælge værdier som passer med ligningen ovenfor.

En egenvektor til egenværdierne kan da skrives som:

Så egenvektoren gælder.

Det kan være relevant at få den mindst mulige egenvektor, altså enheds egenvektoren

*Ligningen løses for a vha. WordMat.*

Resultater fra opgaven:

==============

Egenværdier:

For

==============

### Solve the differential equation x′ = Ax with initial value

Jeg har ikke fået noget at vide om en ikke homogen differentialligning, så med den fundamentale matrix burde jeg kunne løse systemet med:

Løsningerne på grund af gentagende rødder.

For at lave løsningerne lineært uafhængige, ganger jeg t på.

Så har jeg lineært uafhængige løsninger. Løsningerne skrives i den fundamentale matrix i kolonner.

Så lad mig løse systemet:

Problem:  
Den fundamentale matrix er ikke invertibel, så løsningen kan ikke findes på den her måde:

Heldigvis, så ved jeg, at

Og da python har en funktion til matrix exponentialer, så behøves jeg ikke at lave taylor serien for exponential funktioner.

Så med python koden:

Så får jeg

==============

==============

Som man vel skal læse som:

Jeg er ikke helt sikker på det sidste led. Det virker forkert, fordi det sidste led ikke er lineært uafhængig, som jeg netop gjorde den til i den generelle løsning. Måske er det rigtigt, jeg ved det ikke helt.

### Does the solution to the initial value problem pass through the

Jeg kan løse for tiden:

*Ligningen løses for t vha. WordMat.*

Så lad mig sætte denne tid ind for alle koordinater:

Ud fra det, så må jeg konkludere, at løsningen med startbetingelserne   
Ikke kommer igennem

## Opgave 4 Consider the two-population system given by

### Describe the type of x− and y−populations involved and the nature of their interaction

Hældningen i x & y beskrives som et polynomium, men selve differentialligningerne er en første ordens differentialligninger, da den højeste afledte er deres første afledte.

Derfor regner vi som udgangspunkt med at kunne finde en løsning pr. differentialligning. I nogle tilfælde vil differentialligningen ikke være defineret indenfor nogle værdier, og der vil der måske kunne findes flere løsninger.

### Find and characterize the system's critical points with respect to type and stability.

For hver variabel kan vi finde dens kritiske punkt der hvor hældningen af variablen, til hvad den er differentieret i forhold til, er 0.

Så en løsning kan findes for hver y, som er minus 2 gange x værdien + 30.

Eks.

Det samme gøres for hældningen i y.

Så hældningen i y variablen er nul, hvis x er 2 gange y værdien, minus 10

Et kritisk punkt kan også findes hvor at begge variabler er i ligevægt.

Fra første ligning fik vi:

*Ligningen løses for x vha. WordMat.*

Så vi har to x værdier som løser, at begge variabler er i stilstand.

*Der er et sidste punkt, som jeg har glemt at tage højde til.   
Da jeg dividerede med variablen på hver side, så antog jeg også, at variablen ikke var 0, da at dividere med 0 er udefineret. Et kritisk punkt må da også være, når begge variabler er lige med 0.*

Så de tre kritiske punkter, hvor begge variabler er i ligevægt, vil være:

====================

====================

Til at snakke om stabiliteten bruger jeg Jacobian matricen.

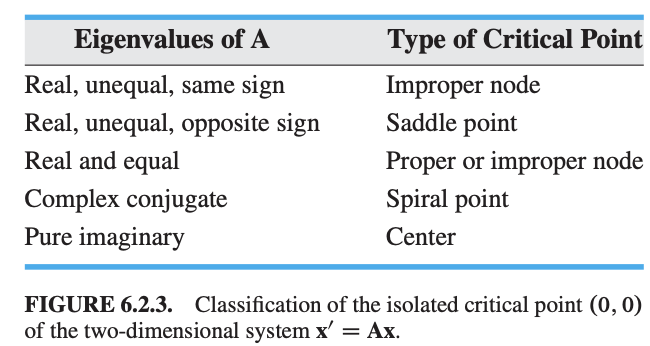
Hvor

Jacobian matricen for systemet får jeg til at være:

Et billede, der indeholder tekst, Font/skrifttype, skærmbillede

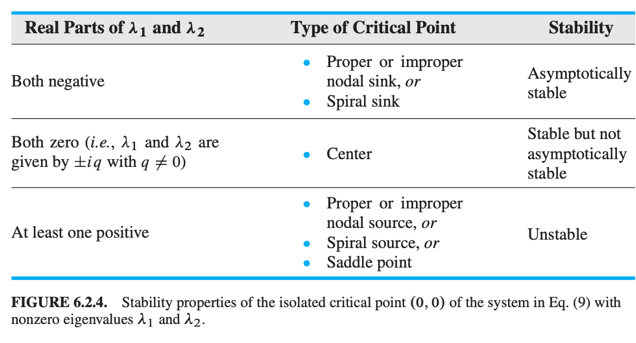
Automatisk genereret beskrivelseMatricens egenværdier fortæller stabiliteten i systemet i valgte punkter.

Jeg leder efter stabiliteten i :

Med figur 6.2.4 & 6.2.3 kan jeg så snakke lidt om de kritiske punkter:

Et billede, der indeholder tekst, skærmbillede, Font/skrifttype, sort

Automatisk genereret beskrivelseProper eller improper kan jeg kun tage stilling til, hvis jeg kender egenvektorerne til punktet. Derfor har jeg udvidet mit script:

Hvis punktet medfører, at der kun er en lineært uafhængigt egenvektor, så er det kritiske punkt improper, ellers proper.

Den samme egenvektor findes i begge de sidste punkter.

Er følgende gældende:

Min konklusion er, at *det ikke er gældende* for nogen *c* værdier som er konstante.

======================================

======================================

### Determine what nonzero x− and y−populations can coexist.

Den mindste population kender jeg, for en negativ population giver ikke mening, og vi vil have dem over 0.

Så den mindste population må være

Den største population i x, må være når hældningen i x når sin ligevægt igen.

Hvis jeg så ser det i forhold til y også, så får jeg min anden ligning til de to ubekendte.

Og så løser jeg for det

Så populationen kan eksistere indenfor:

==========

==========

### Construct a phase-plane portrait and describe the long-term behaviour of the two populations in terms of their initial populations x(0) and y(0).Et billede, der indeholder skærmbillede, linje/række, Kurve, tekst Automatisk genereret beskrivelse

Jeg har lavet et phase plane portrait, hvor jeg har valgt at starte lige udenfor i .

Til

når løsningen til systemet at gå imod:

Som vidst på billedet med rød skrift.

## Opgave 5 For the statements given below, state whether they are true or false and justify your answer for each statement.

### If A is a singular matrix, then eA is also singular.

### If A is a 2×2 matrix with λ1 > 0 and λ2 < 0 then all solutions of the initial value problem x′ = Ax, x(0) = x0 will diverge to infinity due to the positive λ1 eigenvalue.

Det er tæt på sandt. Bare fordi den ene egenværdi vil divergerer mod uendelig, betyder det ikke, at alle de lineært uafhængige løsningerne vil divergerer mod uendeligt.   
Hvis bare en er positiv, vil den dog divergerer mod uendeligt, og hvis de andre er negative, så må de andre løsninger konvergerer mod noget endeligt.   
  
Den løsning med egenværdien > 0 vil derfor dominere og approksimativt vil man da kunne sige, at løsningen går mod den ene divergerende løsning, som går mod uendelig.

### The system described by x′ = ax + y and y′ = −x corresponds to a damped system if a > 0.

Så kan jeg tage Jacobian matricen til systemet for at fortælle lidt om systemet:

Med løsningerne:

Så hvis *a er positiv, så vil*

Så systemet vil divergere i stedet for at blive dæmpet, hvis *a* > 0.